Espaces normés

Normes

Exercice 1 [00454] [Correction]
Soient N_1, N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

(a) On note $B_1 = \{x \in E \mid N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E \mid N_2(x) \leq 1\}$.
Montrer

$$B_1 = B_2 \implies N_1 = N_2$$

(b) Même question avec les boules unités ouvertes.

Exercice 2 [02639] [Correction]
On définit sur $E = \mathcal{C}^0([0\,;1], \mathbb{R})$ une norme par

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

(a) Soient $a, b \geq 0$ et $u, v > 0$. Établir que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \implies \frac{1}{u+v} \leq \frac{a}{u} + \frac{b}{v}$$

(b) Soient $f, g \in E$ telles que $f, g > 0$. Montrer

$$N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)^2 N(f^{-1}) + N(g)^2 N(g^{-1})}{(N(f) + N(g))^2}$$

(c) En déduire que

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1}))$$

Exercice 3 [02766] [Correction]
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

(a) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

(b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
Désormais la norme est euclidienne.

(c) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

(d) Peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$?

Exercice 4 [00795] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \left\|P^{-1}AP\right\|$$

Étude de normes

Exercice 5 [00457] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \left|a_{i,j}\right|, \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \left|a_{i,j}\right|^2} \text{ et } \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \left|a_{i,j}\right|$$

Montrer que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 6 [00459] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2\right)^{1/2}$$

Montrer que $\|.\|$ est une norme matricielle *i.e.* que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$$

Exercice 7 [03625] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}\right|$$

(a) Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Vérifier
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Exercice 8 [00460] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose
$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|$$

(a) Montrer que $\|.\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq \|A\|$.

Exercice 9 [00461] [Correction]
Soient $p > 1$ et $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$.

(a) Pour $a, b \geq 0$, montrer que
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$
Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ et } \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

(b) Soit x et y dans $\mathbb{K}^n$ non nuls. Établir
$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \, \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$
et en déduire
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$$

(c) En écrivant
$$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i| \, (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i| \, (|x_i| + |y_i|)^{p-1}$$
justifier
$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

(d) Conclure que $\|.\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 10 [00462] [Correction]
Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p \geq 1$ on pose
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$
Montrer
$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p$$

Exercice 11 [03248] [Correction]
Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1 \, |x_1| + \cdots + a_n \, |x_n|$$
À quelle condition sur les $a_1, \dots, a_n$, l'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

Exercice 12 [00456] [Correction]
Soient $f_1, \dots, f_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continues.
À quelle condition l'application
$$N : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty$$
définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 13 [00455] [Correction]
Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$N(x_1, x_2) = \sup_{t \in [0;1]} |x_1 + t x_2|$$
est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Représenter la boule unité fermée pour cette norme et comparer celle-ci à $\|.\|_\infty$.

Exercice 14 [03905] [Correction]
On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ sommable *i.e.*
$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{u \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \;\middle|\; \sum |u_n| < +\infty\right\}$$
Montrer que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que l'application donnée par
$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$
y définit une norme

Exercice 15 [03903] [Correction]
Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f\colon I\to\mathbb{K}$ continues et intégrables *i.e.*

$$L^1(I,\mathbb{K})=\left\{f\in C(I,\mathbb{K})\mid \int_I |f|<+\infty\right\}$$

Montrer que $L^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que

$$\|f\|_1=\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

y définit une norme.

Exercice 16 [03904] [Correction]
Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On note $L^2(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f\colon I\to\mathbb{K}$ continue et de carré intégrable *i.e.*

$$L^2(I,\mathbb{K})=\left\{f\in C(I,\mathbb{K})\mid \int_I |f|^2<+\infty\right\}$$

Montrer que $L^2(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que

$$\|f\|_2=\left(\int_I |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

y définit une norme.

Exercice 17 [03906] [Correction]
On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u=(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable *i.e.*

$$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})=\left\{u\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\mid \sum |u_n|^2<+\infty\right\}$$

Montrer que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que l'application donnée par

$$\|u\|_2=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2\right)^{1/2}$$

y définit une norme.

Exercice 18 [04096] [Correction]
On introduit une norme $\|.\|$ sur l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant

$$\|X\|=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

et on note S l'ensemble formé des colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme égale à 1.

(a) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de

$$\sup_{X\in S}\|AX\|$$

(b) On pose

$$N(A)=\sup_{X\in S}\|AX\|$$

Justifier que pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\|\le N(A)\,\|X\|$.

(c) Vérifier que N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) Montrer

$$N(A)=\sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|$$

Exercice 19 [04136] [Correction]
Pour $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\|=\sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|$$

(a) Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Pour X colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose

$$N(X)=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

Vérifier

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\,N(AX)\le\|A\|\,N(X)$$

(c) En déduire

$$\|A\|=\sup_{N(X)=1}N(AX)$$

Distance

Exercice 20 [03272] [Correction]
On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infinie notée $\|.\|_\infty$.
Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel C_0 des suites réelles convergeant vers 0.

Exercice 21 [03273] [Correction]
On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|.\|_\infty$.
Déterminer la distance de la suite $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel C des suites réelles convergentes.

Exercice 22 [00470] [Correction]
On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|.\|_\infty$.
Pour $x \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, on note Δx la suite de terme général

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

puis on forme $F = \{\Delta x \mid x \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})\}$.
Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel F.

Exercice 23 [03463] [Correction]
Soit E l'espace des fonctions bornées de $[-1\,;1]$ vers $\mathbb{R}$ normé par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1;1]} |f(x)|$$

Déterminer la distance de la fonction

$$f\colon x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \,]0\,;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \in [-1\,;0[\end{cases}$$

au sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions continues de $[-1\,;1]$ vers $\mathbb{R}$.

Comparaison de normes

Exercice 24 [00466] [Correction]
Soit $E = C^0([0\,;1], \mathbb{R})$. On définit les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{[0;1]} |f|$$

(a) Montrer que $\|.\|_\infty$ est plus fine que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ mais qu'elle n'équivaut ni à l'une, ni à l'autre.

(b) Comparer $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.

Exercice 25 [00467] [Correction]
Soit $E = C^1([-1\,;1], \mathbb{R})$. On définit N_1, N_2 et N_3 par

$$N_1(f) = \sup_{[-1;1]} |f|\,, N_2(f) = |f(0)| + \sup_{[-1;1]} \left|f'\right| \text{ et } N_3(f) = \int_{-1}^1 |f|$$

(a) Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E.

(b) Comparer N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part.

Exercice 26 [02412] [Correction]
Soient l'espace $E = \left\{f \in C^1([0\,;1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\right\}$ et N l'application définie sur E par

$$N(f) = N_\infty(3f + f')$$

(a) Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé puis qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_\infty(f) \le \alpha N(f)$.

(b) Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 27 [00465] [Correction]
Soient $E = C^1([0\,;1], \mathbb{R})$ et $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

(a) Montrer que N définit une norme sur E.

(b) Comparer N et $\|.\|_\infty$.

Exercice 28 [00473] [Correction]
Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Étudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n}X^n$$

(c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 29 [00468] [Correction]
On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
On définit des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ en posant

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|, \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2} \text{ et } \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

(a) Comparer $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.

(b) Comparer $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.

Exercice 30 [00469] [Correction]
On note $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles sommables. Cet espace est normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

(a) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Montrer que u est bornée.
Cela permet d'introduire la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Comparer $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.

(b) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Montrer que u est de carré sommable
Cela permet d'introduire la norme $\|.\|_2$ définie par

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2}$$

Comparer $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.

Exercice 31 [03265] [Correction]
On note $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées normé par $\|.\|_\infty$.

(a) Soit $a = (a_n)$ une suite réelle. Former une condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que l'application

$$N_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|$$

définit une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

(b) Comparer N_a et $\|.\|_\infty$.

Exercice 32 [00039] [Correction]
On note E l'espace des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$.

(a) Montrer que

$$N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ et } N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

définissent des normes sur l'espace E.

(b) Montrer que

$$\forall u \in E, N(u) \le 2N_\infty(u)$$

Déterminer une suite non nulle telle qu'il y ait égalité.

(c) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Comparaison de normes équivalentes

Exercice 33 [00463] [Correction]
On note $E = C^1([0\,;1],\mathbb{R})$.

(a) Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = |f(0)| + \left\|f'\right\|_\infty$$

Montrer que N est une norme sur E.

(b) Pour $f \in E$, on pose

$$N'(f) = \|f\|_\infty + \left\|f'\right\|_\infty$$

On vérifie aisément que N' est une norme sur E. Montrer qu'elle est équivalente à N.

(c) Les normes N et N' sont elles équivalentes à $\|.\|_\infty$?

Exercice 34 [03267] [Correction]
Soient l'espace $E = \left\{f \in C^1([0\,;1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\right\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E par

$$N_1(f) = \left\|f'\right\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \left\|f + f'\right\|_\infty$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.

(b) Montrer que N_2 est dominée par N_1.

(c) En exploitant l'identité

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x \left(f(t) + f'(t)\right)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

montrer que N_1 est dominée par N_2.

Exercice 35 [00464] [Correction]
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0;1]} \left|f'(x)\right| \text{ et } N_2(f) = \sup_{x\in[0;1]} \left|f(x) + f'(x)\right|$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 36 [02411] [Correction]
Soit

$$E = \left\{f \in C^2([0\,;\pi],\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$$

(a) Montrer que

$$N\colon f \mapsto \left\|f + f''\right\|_\infty$$

est une norme sur E.

(b) Montrer que N est équivalente à

$$\nu\colon f \mapsto \|f\|_\infty + \left\|f''\right\|_\infty$$

Exercice 37 [03262] [Correction]
Soient $E = C([0\,;1],\mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \sup_{t\in[0;1]} \{|f(t)|\,\varphi(t)\}$$

(a) Montrer que $\|.\|_\varphi$ est une norme sur E

(b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.

(c) Les normes $\|.\|_x$ et $\|.\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Exercice 38 [02767] [Correction]
Soient $E = C([0\,;1],\mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $\|.\|_\varphi$ est une norme sur E

(b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.

(c) Les normes $\|.\|_x$ et $\|.\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Équivalence de normes en dimension finie

Exercice 39 [00458] [Correction]
Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que

$$N(AB) \le cN(A)N(B)$$

Exercice 40 [03146] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace des polynômes réels de degrés inférieurs à n.
Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant

$$\forall P \in E, \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \ge \lambda \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|$$

Exercice 41 [00474] [Correction]
Pour $d \in \mathbb{N}$, on pose $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace des polynômes réels en l'indéterminée X de degrés inférieurs ou égaux à d.

(a) Pour $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$ famille de $d+1$ nombres réels distincts et $P \in E$, on pose

$$N_\xi(P) = \sum_{k=0}^{d} |P(\xi_k)|$$

Montrer que N_ξ définit une norme sur E.

(b) Soit (P_n) une suite de polynômes éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$P_n = \sum_{k=0}^{d} a_{k,n} X^k$$

Établir que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) la suite de fonctions (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$;
(ii) la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$;
(iii) pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, la suite $(a_{k,n})$ converge.

Exercice 42 [02768] [Correction]
Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie $d \geq 1$ de l'espace $\mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ de fonctions continues.

(a) Établir l'existence de $(a_1, \dots, a_d) \in [0\,;1]^d$ tel que l'application

$$N\colon f \in E \mapsto \sum_{i=1}^{d} |f(a_i)|$$

soit une norme.

(b) Soit (f_n) une suite de fonctions de E qui converge simplement vers une fonction $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$.
Montrer que f est élément de E et que la convergence est uniforme.

Exercice 43 [01582] [Correction]
Montrer que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales toute de degré inférieur à N convergeant simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction polynomiale et la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 44 [02409] [Correction]

(a) Quelles sont les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application

$$(x, y) \mapsto N_a(x, y) = \sqrt{x^2 + 2axy + y^2}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Si N_a et N_b sont des normes, calculer

$$\inf_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} \text{ et } \sup_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}$$

Suites de vecteurs

Exercice 45 [03143] [Correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose

$$(AB)^n \to O_p$$

Montrer que

$$(BA)^n \to O_p$$

Exercice 46 [01670] [Correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} P \text{ et } B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} Q$$

On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que les matrices P et Q commutent.

Exercice 47 [00471] [Correction]
Soit (A_n) une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
On suppose

$$A_n \to A \text{ et } A_n^{-1} \to B$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 48 [00472] [Correction]
À quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ existe-t-il $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ vérifiant

$$M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A ?$$

Exercice 49 [03010] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers B.
Montrer que B est semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 et des 1.

Exercice 50 [03022] [Correction]

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable vérifiant $\mathrm{Sp}(A) \subset]-1\,;1[$. Montrer $A^n \to O_p$.

(b) Même question avec trigonalisable au lieu de diagonalisable.

Exercice 51 [03036] [Correction]
Soit (A_n) une suite convergente d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de limite A_∞.
Montrer que pour n assez grand

$$\mathrm{rg}(A_n) \geq \mathrm{rg}(A_\infty)$$

Exercice 52 [03475] [Correction]
Soit (A_k) une suite de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que les A_k sont tous de rang p donné. Montrer que $\mathrm{rg}\,A \leq p$.

Exercice 53 [03413] [Correction]
Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On note E_q l'ensemble des $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A^q = I_n$$

(a) Que dire de $A \in E_q$ telle que 1 est seule valeur propre de A ?

(b) Montrer que I_n est un point isolé de E_q.

Exercice 54 [03851] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} A_n^n$ avec

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 55 [03925] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que dire de B ?

Séries de vecteurs

Exercice 56 [02728] [Correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence de :
(i) toute valeur propre de M est de module strictement inférieur à 1 ;
(ii) la suite (M^k) tend vers 0 ;
(iii) la série de terme général M^k converge.

Exercice 57 [04052] [Correction]
Soient E un espace de dimension finie de norme $\|.\|$ et f une application de E vers E.
On dit que f est contractante si

$$\exists k \in [0\,;1[, \forall x, y \in E, \|f(y) - f(x)\| \leq k\,\|y - x\|$$

(a) On suppose que f est contractante et l'on introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$x_0 \in E \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

Montrer la convergence de la série $\sum x_{n+1} - x_n$.

(b) En déduire que lorsque f est contractante, elle admet un point fixe et justifier que celui-ci est unique.

(c) Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante alors f admet un unique point fixe.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Soit $x \in E$. Si $x = 0$ alors $N_1(x) = N_2(x) = 0$. Sinon :
Posons $y = \frac{x}{N_1(x)}$. On a $y \in B_1 \subset B_2$ donc $N_2(y) \leq 1$ d'où $N_2(x) \leq N_1(x)$.
De manière symétrique $N_1(x) \leq N_2(x)$ puis l'égalité.

(b) On reprend la démarche ci-dessus à partir de

$$y = \frac{x}{N_1(x) + \varepsilon}$$

avec $\varepsilon > 0$ pour obtenir $N_2(x) < N_1(x) + \varepsilon$ avant de faire tendre ε vers 0.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Par réduction au même dénominateur

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{av(u+v) + bu(u+v) - uv}{uv(u+v)}$$

qu'on peut réécrire

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{(\sqrt{a}v - \sqrt{b}u)^2 + (a + b + 2\sqrt{ab} - 1)uv}{uv(u+v)}$$

et si $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ alors

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{(\sqrt{a}v - \sqrt{b}u)^2}{uv(u+v)} \geq 0$$

(b)

$$N((f+g)^{-1}) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t) + g(t)} \leq a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} + b\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = aN(f^{-1}) + bN(g^{-1})$$

qui donne l'inégalité voulue avec

$$a = \frac{N(f)^2}{(N(f) + N(g))^2} \text{ et } b = \frac{N(g)^2}{(N(f) + N(g))^2}$$

qui sont tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$.

(c) Par l'inégalité triangulaire

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq (N(f) + N(g))N((f+g)^{-1})$$

et en vertu de ce qui précède

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)^2 N(f^{-1})}{N(f) + N(g)} + \frac{N(g)^2 N(g^{-1})}{N(f) + N(g)}$$

qui donne

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)}{N(f) + N(g)}M + \frac{N(g)}{N(f) + N(g)}M = M$$

avec

$$M = \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1}))$$

Document3

Exercice 3 : [énoncé]

(a) $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donc

$$\|x\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

Aussi $\|y\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ donc

$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

(b) Sur $\mathbb{R}^2$ avec $\|\| = \|\|_\infty$, il y a égalité pour $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.

(c) On a déjà

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Or $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donne

$$\|x\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2\right)$$

aussi

$$\|y\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right)$$

donc

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

puis

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}^2$$

qui permet de conclure.

(d) Non, sur $\mathbb{R}^2$, il y a égalité pour $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.

Exercice 4 : [énoncé]
Cas $n = 2$
Par l'absurde supposons qu'une telle norme existe.
Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Les matrices A et B sont semblables (via $P = \operatorname{diag}(1/2, 1)$) donc $\|A\| = \|B\|$. Or $B = 2A$ donc $\|B\| = 2\|A\|$ puis $\|A\| = 0$.
C'est absurde car $A \neq O_2$.
Cas général : semblable.

Exercice 5 : [énoncé]
Ce sont les normes usuelles associées à la base canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 6 : [énoncé]
$\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est la norme 2 associée à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \le \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{\ell=1}^n b_{\ell,j}^2$$

donc

$$\|AB\|^2 \le \sum_{i,k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{j,\ell=1}^n b_{\ell,j}^2 = \|A\|^2 \|B\|^2$$

puis

$$\|AB\| \le \|A\| \|B\|$$

Exercice 7 : [énoncé]

(a) L'application $\|.\|$ est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}_+$.
Si $\|A\| = 0$ alors

$$\forall 1 \le i \le n, \sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}\right| = 0$$

et donc

$$\forall 1 \le i, j \le n, a_{i,j} = 0$$

ainsi la matrice A est nulle.
De plus

$$\begin{aligned}
\|\lambda A\| &= \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n \left|\lambda a_{i,j}\right| \\
&= \sup_{1\le i\le n} |\lambda| \sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}\right| \\
&= |\lambda| \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}\right| \\
&= |\lambda| \|A\|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|A + B\| &= \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n \left|a_{i,j} + b_{i,j}\right| \\
&\le \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}\right| + \left|b_{i,j}\right| \\
&\le \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}\right| + \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n \left|b_{i,j}\right| \\
&= \|A\| + \|B\|
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\|AB\| = \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right| \le \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left|a_{i,k} b_{k,j}\right|$$

Or

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{i,k}b_{k,j}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,k}\right|\left|b_{k,j}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|a_{i,k}\right|\sum_{j=1}^{n}\left|b_{k,j}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|a_{i,k}\right|\|B\| \le \|A\|\,\|B\|$$

donc

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) L'application $\|.\|$ est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}_+$.
Si $\|A\| = 0$ alors

$$\forall 1 \le i \le n, \sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right| = 0$$

et donc

$$\forall 1 \le i, j \le n, a_{i,j} = 0$$

ainsi la matrice A est nulle.
De plus

$$\|\lambda A\| = \sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\lambda a_{i,j}\right| = \sup_{1\le i\le n}|\lambda|\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right| = |\lambda|\sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right| = |\lambda|\,\|A\|$$

et

$$\|A+B\| = \sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}+b_{i,j}\right| \le \sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right| + \left|b_{i,j}\right|$$

donc

$$\|A+B\| \le \sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right| + \sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{i,j}\right| = \|A\| + \|B\|$$

Enfin

$$\|AB\| = \sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right| \le \sup_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{i,k}b_{k,j}\right|$$

Or

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{i,k}b_{k,j}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,k}\right|\left|b_{k,j}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|a_{i,k}\right|\sum_{j=1}^{n}\left|b_{k,j}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|a_{i,k}\right|\|B\| \le \|A\|\,\|B\|$$

donc

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$$

(b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, il existe $X \ne 0$, $AX = \lambda X$.
En notant $x_1,\dots,x_n$ les éléments de la colonne X (non tous nuls) on a

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$$

Considérons $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $|x_i| = \max_{1\le j\le n}\left|x_j\right| \ne 0$.
La relation précédente donne :

$$|\lambda|\,|x_i| \le \sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\left|x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right||x_i|$$

donc

$$|\lambda| \le \sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right| \le \|A\|$$

Exercice 9 : [énoncé]

(a) L'inégalité vaut pour $a = 0$ ou $b = 0$. Pour $a, b > 0$.
La fonction ln est concave :

$$\forall \lambda \in [0\,;1], \forall x, y > 0, \lambda\ln(x) + (1-\lambda)\ln(y) \le \ln(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

Appliquée à $x = a^p$, $y = b^q$ et $\lambda = 1/p$ cela donne :

$$\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \le \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$$

puis

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

(b) On applique le résultat précédent à $a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$ et $b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$ pour obtenir

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \, \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

En sommant pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \, \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

puis

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$$

(c) Par l'inégalité triangulaire

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p$$

Or par l'identité proposée

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \, (|x_i| + |y_i|)^{p-1}$$

Par l'inégalité du b)

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p \leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1/q}$$

car $(p-1)q = pq - q = p$
puis

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

car $1 - 1/q = 1/p$ (et l'inégalité vaut que $\sum_{i=1}^{n} (|x_i|^p + |y_i|^p) \neq 0$ ou non)
Finalement

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

(d) Les propriétés $\|x\|_p = 0 \implies x = 0$ et $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$ sont immédiates.

Exercice 10 : [énoncé]
Si $\|x\|_\infty = 0$ alors $x = 0$ et $\|x\|_p = 0$ donc

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p$$

Si $\|x\|_\infty \neq 0$. Pour tout $p \geq 1$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \left(n \, \|x\|_\infty^p \right)^{1/p} = n^{1/p} \, \|x\|_\infty \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|x\|_\infty$$

donc

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

Exercice 11 : [énoncé]
Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Si N est une norme alors

$$N(e_i) = a_i > 0$$

Il est donc nécessaire que les $a_1, \ldots, a_n$ soient tous strictement positifs pour que N soit une norme.
Inversement, supposons que les $a_1, \ldots, a_n$ sont tous strictement positifs.
L'application N est alors à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
La relation $N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$ est immédiate.
Puisque les a_i sont positifs, on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ car $a_i \, |x_i + y_i| \leq a_i \, |x_i| + a_i \, |y_i|$.
Enfin, si $N(x) = 0$ alors par nullité d'une somme de quantités positives

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, a_i \, |x_i| = 0$$

donc

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i = 0$$

i.e. $x = 0_{K^n}$.

Exercice 12 : [énoncé]
L'application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est bien définie car toute fonction continue sur le segment $[0\,;1]$ y est bornée
La liberté de la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une condition nécessaire car, sinon, une relation linéaire sur la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ détermine un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ non nul tel que $N(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
Inversement, supposons la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ libre.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si $N(x) = 0$ alors $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = 0$ et donc $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ car $(f_1, \ldots, f_n)$ libre.

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \|\lambda x_1 f_1 + \cdots + \lambda x_n f_n\|_\infty \\ &= \|\lambda (x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n)\|_\infty = |\lambda| \, N(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \|(x_1 + y_1) f_1 + \cdots + (x_n + y_n) f_n\|_\infty \\ &= \|(x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n) + (y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n)\|_\infty \\ &\le N(x) + N(y). \end{aligned}$$

Finalement N est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 13 : [énoncé]
Quand t varie de 0 à 1, l'expression $|x_1 + t x_2|$ varie de $|x_1|$ à $|x_1 + x_2|$
Par suite, on peut exprimer plus simplement l'action de N :

$$N(x_1, x_2) = \max \{|x_1|, |x_1 + x_2|\}$$

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \max \{|x_1 + y_1|, |x_1 + y_1 + x_2 + y_2|\} \\ &\le \max \{|x_1| + |y_1|, |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|\} \\ &\le N(x) + N(y) \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda.x) = \max \{|\lambda| \, |x_1|, |\lambda| \, |x_1 + x_2|\} = |\lambda| \, N(x)$$

Enfin si $N(x) = 0$ alors $|x_1| = |x_1 + x_2| = 0$ et donc $x_1 = x_1 + x_2 = 0$ puis $x = 0$.
Ainsi N définie bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Si $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ alors $N(x) = x_1 + x_2$.
Si $x_1 \le 0, x_2 \ge 0$ alors $N(x) = \max(-x_1, |x_1 + x_2|)$.
Si $x_1 \ge 0, x_2 \le 0$ alors $N(x) = \max(x_1, |x_1 + x_2|)$.
Si $x_1 \le 0, x_2 \le 0$ alors $N(x) = -(x_1 + x_2)$.
Ces considérations permettent de représenter la boule unité fermée. De manière immédiate : $N(x) \le 2 \|x\|_\infty$.
Aussi $|x_1| \le 2N(x)$ et puisque $|x_2| \le |x_1 + x_2| + |x_1|$ on a aussi $|x_2| \le 2N(x)$.
On en déduit $\|x\|_\infty \le 2N(x)$.

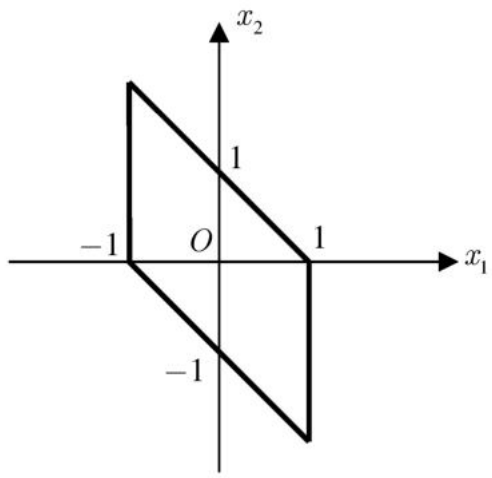

Figure 1 – La boule unité fermée pour la norme N

Exercice 14 : [énoncé]
$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$(0)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{K})$.
Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$,

$$|(\lambda u + \mu v)_n| \le |\lambda| \, |u_n| + |\mu| \, |v_n|$$

Par comparaison de séries à termes positifs

$$\lambda u + \mu v \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|.\|_1 : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Si $\|u\|_1 = 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 0$ et par suite $u = 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda| \, |u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda| \, \|u\|_1$$

Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$\|u + v\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n| \le \sum_{n=0}^{+\infty} (|u_n| + |v_n|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1$$

Exercice 15 : [énoncé]
$L^1(I,\mathbb{K}) \subset C(I,\mathbb{K})$ et $C(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$\tilde{0} \in L^1(I,\mathbb{K})$.
Soit $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ et $f,g \in L^1(I,\mathbb{K})$.
Pour tout $t \in I$,

$$|(\lambda f + \mu g)(t)| \leq |\lambda|\,|f(t)| + |\mu|\,|g(t)|$$

donc par comparaison de fonctions positives $\lambda f + \mu g \in L^1(I,\mathbb{K})$.
Finalement $L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C(I,\mathbb{K})$ et c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|.\|_1 : L^1(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Soit $f \in L^1(I,\mathbb{K})$. Si $\|f\|_1 = 0$ alors $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$ or $|f|$ est continue et positive sur I d'intérieur non vide donc $f = \tilde{0}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^1(I,\mathbb{K})$.

$$\|\lambda f\|_1 = \int_I |\lambda|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda|\,\|f\|_1$$

Soient $f,g \in L^1(I,\mathbb{K})$

$$\|f+g\|_1 \leq \int_I |f(t)| + |g(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$\|.\|_1$ définit bien une norme sur $L^1(I,\mathbb{K})$

Exercice 16 : [énoncé]
$L^2(I,\mathbb{K}) \subset C(I,\mathbb{K})$ et $C(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$0 \in L^2(I,\mathbb{K})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^2(I,\mathbb{K})$. Pour tout $t \in I$.

$$|(\lambda f)(t)|^2 = |\lambda|^2\,|f(t)|^2$$

donc par comparaison $\lambda f \in L^2(I,\mathbb{K})$.
Soit $f,g \in L^2(I,\mathbb{K})$. Pour tout $t \in I$

$$|(f+g)(t)|^2 \leq (|f(t)| + |g(t)|)^2 = |f(t)|^2 + 2\,|f(t)|\,|g(t)| + |g(t)|^2 \leq 2\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right)$$

car $2ab \leq a^2 + b^2$
Par comparaison de fonctions positives $f + g \in L^2(I,\mathbb{K})$.
Finalement $L^2(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C(I,\mathbb{K})$ et c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|.\|_2 : L^2(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Soit $f \in L^2(I,\mathbb{K})$. Si $\|f\|_2 = 0$ alors $\int_I |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0$ or $|f|^2$ est continue et positive sur I d'intérieur non vide donc

$$\forall t \in I, |f(t)|^2 = 0$$

puis $f = \tilde{0}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^2(I,\mathbb{K})$.

$$\|\lambda f\|_2 = \left(\int_I |\lambda|^2\,|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^2 = |\lambda|\,\|f\|_2$$

Soit $f,g \in L^2(I,\mathbb{K})$.

$$\|f+g\|_2^2 \leq \int_I (|f(t)| + |g(t)|)^2\,\mathrm{d}t = \|f\|_2^2 + 2\int_I |f(t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t + \|g\|_2^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $f,g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Ici

$$\int_a^b |f(t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leq \|f\|_2\,\|g\|_2$$

Or pour $f\colon I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux intégrable

$$\forall [a\,;b] \subset I, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_I f$$

donc ici

$$\int_I |f(t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_2\,\|g\|_2$$

et enfin

$$\|f+g\|_2^2 \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 17 : [énoncé]
$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$0 \in \ell^2(\mathbb{K})$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$, $\lambda u \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$.
Pour $u,v \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$,

$$|(u+v)_n|^2 \leq |u_n|^2 + 2\,|u_n|\,|v_n| + |v_n|^2 \leq 2\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right)$$

car $2ab \leq a^2 + b^2$.
Par comparaison de séries à termes positifs, $u + v \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.
$\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|.\|_2 : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Soit $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Si $\|u\|_2 = 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n|^2 = 0$ puis $u = 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n|^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^2 |u_n|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} = |\lambda| \|u\|_2$$

Soit $u, v \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$\|u + v\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| |v_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n| |v_n| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |v_n|}$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| |v_n| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|}$$

Ainsi

$$\|u + v\|_2^2 \leq (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2$$

puis

$$\|u + v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$$

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\forall 1 \leq i \leq n, |(AX)_i| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \left|x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|$$

et donc

$$\|AX\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| = M$$

Ainsi, l'ensemble $\{\|AX\| \mid X \in S\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, elle admet une borne supérieure.

(b) Si $X = 0$, c'est immédiat.
Si $X \neq 0$, on introduit $X' = X/\|X\| \in S$ et l'on exploite $\|AX'\| \leq N(A)$.

(c) L'application N est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ en vertu de ce qui précède.
Si $N(A) = 0$ alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|AX\| = 0$. En particulier, en prenant des colonnes X élémentaires, on obtient que chaque colonne de A est nulle.

$$N(\lambda A) = \sup_{X \in S} \|\lambda AX\| = \sup_{X \in S} |\lambda| \|AX\| = |\lambda| \sup_{X \in S} \|AX\| = |\lambda|$$

Enfin

$$\begin{aligned} N(A + B) &= \sup_{X \in S} \|(A + B)X\| \\ &\leq \sup_{X \in S} \|AX + BX\| \\ &\leq \sup_{X \in S} \|AX\| + \sup_{X \in S} \|BX\| \\ &= N(A) + N(B) \end{aligned}$$

Finalement, N définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) On a déjà vu

$$N(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|$$

Soit i_0 l'indice pour lequel

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i_0,j}\right|$$

Prenons ensuite $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ avec $x_j = \pm 1$ de sorte que $a_{i_0,j} x_j = \left|a_{i_0,j}\right|$.
On a $X \in S$ et $\|AX\| = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i_0,j}\right|$ donc

$$N(A) \geq \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i_0,j}\right|$$

puis l'égalité voulue.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) L'application $\|.\|$ est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$.
Si $\|A\| = 0$ alors

$$\forall 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| = 0$$

et donc
$$\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} = 0$$
ainsi la matrice A est nulle.
De plus
$$\begin{aligned}\|\lambda A\| &= \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|\lambda a_{i,j}\right| \\ &= \sup_{1\leq i\leq n} |\lambda| \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \\ &= |\lambda| \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \\ &= |\lambda| \|A\|\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j} + b_{i,j}\right| \\ &\leq \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| + \left|b_{i,j}\right| \\ &\leq \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| + \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|b_{i,j}\right| \\ &= \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

(b) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned}N(AX) &= \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \left|x_j\right| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| N(X) \\ &= \|A\| N(X)\end{aligned}$$

(c) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $N(X) = 1$, on a immédiatement $N(AX) \leq \|A\|$. On en déduit l'inégalité suivante avec existence de la borne supérieure
$$\sup_{N(X)=1} N(AX) \leq \|A\|$$
Pour l'inégalité inverse, introduisons i_0 l'indice pour lequel
$$N(A) = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i_0,j}\right|$$
et introduisons X la colonne dont les coefficients sont donnés par
$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0,j} \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$
de sorte que $\left|x_j\right| = 1$ et $a_{i_0,j}x_j = \left|a_{i_0,j}\right|$. La colonne X vérifie alors
$$N(X) = 1 \text{ et } N(AX) \geq (AX)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i_0,j}\right| = \|A\|$$
On peut donc affirmer
$$\sup_{N(X)=1} N(AX) \geq \|A\|$$
puis l'égalité. En fait, la borne supérieure est un max !

Exercice 20 : [énoncé]
Puisque $0 \in C_0$, on a déjà
$$d(e, C_0) \leq d(e, 0) = \|e\|_\infty = 1$$
Soit $x \in C_0$. On a
$$|x_n - 1| \leq \|x - e\|_\infty$$
et donc quand $n \to +\infty$
$$1 \leq \|x - e\|_\infty$$
On en déduit
$$d(e, C_0) \geq 1$$
et donc $d(e, C_0) = 1$.

Exercice 21 : [énoncé]
Puisque $0 \in C_0$, on a déjà
$$d(u, C) \leq d(u, 0) = \|u\|_\infty = 1$$
Soit $x \in C$ et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Pour $n = 2p$ pair
$$\left|x_{2p} - u_{2p}\right| \leq \|x - u\|_\infty$$

donne $\left|x_{2p}-1\right| \leq \|x-u\|_\infty$ puis à la limite

$$|\ell - 1| \leq \|x-u\|_\infty$$

De même avec $n = 2p+1$ impair on obtient

$$|\ell + 1| \leq \|x-u\|_\infty$$

On en duite

$$|1| = \left|\frac{1+\ell}{2} + \frac{1-\ell}{2}\right| \leq \frac{1}{2}(|1+\ell| + |1-\ell|) \leq \|x-u\|_\infty$$

On en déduit

$$d(u,C) \geq 1$$

et donc $d(u,C) = 1$.

Exercice 22 : [énoncé]

Puisque $0 \in F$, $d(e,F) \leq d(e,0) = 1$.
En raisonnant par l'absurde montrons $d(e,F) = 1$ en supposant $d(e,F) < 1$.
Il existe alors une suite $x \in \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ vérifiant $\|\Delta x - e\|_\infty = \rho$ avec $\rho < 1$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\Delta x(k) - 1| \leq \rho$ donc $\Delta x(k) \geq 1-\rho$.
En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$, on obtient $x(n) - x(0) \geq n(1-\rho)$ et donc $x \to +\infty$.
Ceci contredit $x \in \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et permet de conclure.

Exercice 23 : [énoncé]

Par définition

$$d(f,F) = \inf_{g\in F} \|f-g\|_\infty$$

Puisque la fonction nulle est continue

$$d(f,F) \leq \left\|f - \tilde{0}\right\|_\infty = 1$$

Inversement, soit $g \in F$.
Pour tout $x > 0$.

$$|f(x) - g(x)| = |1 - g(x)| \leq \|f-g\|_\infty$$

donc à la limite quand $x \to 0^+$

$$|1 - g(0)| \leq \|f-g\|_\infty$$

De même, pour $x < 0$,

$$|f(x) - g(x)| = |1 + g(x)| \leq \|f-g\|_\infty$$

et donc à la limite quand $x \to 0^-$

$$|1 + g(0)| \leq \|f-g\|_\infty$$

On en déduit

$$2 \leq |1+g(0)| + |1-g(0)| \leq 2\|f-g\|_\infty$$

et donc

$$1 \leq \|f-g\|_\infty$$

Finalement $1 \leq d(f,F)$ puis $d(f,F) = 1$.

Exercice 24 : [énoncé]

(a)

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

et

$$\|f\|_2 \leq \left(\int_0^1 \|f\|_\infty^2\right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty$$

Posons $f_n(x) = x^n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ alors que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$ et $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$. Les normes ne sont donc pas équivalentes.

(b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 1 \times |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^1 1\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

donc

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2$$

Pour $f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n$, $\|f_n\|_2 = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \to 0$, les normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Sans difficultés.

(b) On a $N_1(f) \leq N_2(f)$ car

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |f(0)| + |x| \sup_{[-1;1]} \left|f'\right|$$

et sans difficultés on a aussi $N_3(f) \leq 2N_1(f)$.

Posons
$$f_n(x) = x^n$$
On a $N_1(f_n) = 1$, $N_2(f_n) = n$ et $N_3(f_n) = \frac{2}{n+1}$.
On en déduit que les normes N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part, ne sont pas équivalentes.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Les propriétés $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$ et $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ sont faciles.
Si $N(f) = 0$ alors la résolution de l'équation différentielle $f' + 3f = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 0$ donne $f = 0$. Ainsi l'application N est bien une norme sur E.
On remarque
$$f(x) = \mathrm{e}^{-3x} \int_0^x \left(f(t)\mathrm{e}^{3t}\right)' \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-3x} \int_0^x (3f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{3t} \,\mathrm{d}t$$
Par suite $|f(x)| \leq \mathrm{e}^3 N(f)$ pour tout $x \in [0\,;1]$ et donc $N_\infty(f) \leq \alpha N(f)$ avec $\alpha = \mathrm{e}^3$.

(b) Pour $f_n(x) = x^n$, $N_\infty(f) = 1$ et $N(f) = N_\infty(x \mapsto 3x^n + nx^{n-1}) = n + 3 \to +\infty$.
Les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Posons $\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. φ est une forme bilinéaire symétrique, $\varphi(f,f) \geq 0$ et si $\varphi(f,f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0\,;1]$, $f'(t) = 0$ donc $f = 0$. φ est donc un produit scalaire et N apparaît comme étant la norme associée.

(b) Pour tout $x \in [0\,;1]$, $|f(x)| \leq |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{2}N(f)$, donc $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.Pour $f(x) = \sin(nx\pi)$, $\|f\|_\infty = 1$ et $N(f) = n\pi/\sqrt{2} \to +\infty$. Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) $N_1, N_2 \colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}N_1(P+Q) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| + \left|Q^{(k)}(0)\right| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| + \sum_{k=0}^{+\infty} \left|Q^{(k)}(0)\right| = N_1(P) + N_1(Q)\end{aligned}$$
$$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\lambda P^{(k)}(0)\right| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| = |\lambda|\, N_1(P)$$
$$N_1(P) = 0 \implies \forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0$$
or
$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$
et donc $P = 0$.
Finalement, N_1 est une norme.
$$\begin{aligned}N_2(P+Q) &= \sup_{t\in[-1;1]} |P(t) + Q(t)| \leq \sup_{t\in[-1;1]} |P(t)| + |Q(t)| \\ &\leq \sup_{t\in[-1;1]} |P(t)| + \sup_{t\in[-1;1]} |Q(t)| = N_2(P) + N_2(Q)\end{aligned}$$
$$N_2(\lambda P) = \sup_{t\in[-1;1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t\in[-1;1]} |\lambda|\,|P(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[-1;1]} |P(t)| = |\lambda|\, N_2(P)$$
$$N_2(P) = 0 \implies \forall t \in [-1\,;1], P(t) = 0$$
et par infinité de racines $P = 0$.

(b) La suite $\left(\frac{1}{n}X^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour N_2 mais n'est pas bornée et donc diverge pour N_1.

(c) Les normes ne peuvent être équivalentes car sinon les suites convergeant pour l'une des normes convergerait pour l'autre.

Exercice 29 : [énoncé]

(a) Aisément $\|.\|_\infty \leq \|.\|_1$
Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon.
On a $\left\|u^N\right\|_1 = N$ et $\left\|u^N\right\|_\infty = 1$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|.\|_1 \leq \alpha \|.\|_\infty$.
$\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

(b) En introduisant N tel que $n > N \implies u_n = 0$ on a
$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 = \sum_{n=0}^{N} |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)^2 = \|u\|_1^2$$
Ainsi $\|.\|_2 \leq \|.\|_1$.
Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon.
On a $\left\|u^N\right\|_1 = N$ et $\left\|u^N\right\|_2 = \sqrt{N}$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|.\|_1 \leq \alpha \|.\|_2$.
$\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) La suite u étant sommable, elle converge vers 0 et est par conséquent bornée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

donc

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1$$

Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $u^N \in \ell^1(\mathbb{R})$.
On a $\left\|u^N\right\|_1 = N$ et $\left\|u^N\right\|_\infty = 1$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|.\|_1 \leq \alpha \|.\|_\infty$.
$\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

(b) On a $\sum_{n=0}^N |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^N |u_n|\right)^2$ donc quand $N \to +\infty$:

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)^2 = \|u\|_1^2$$

Ainsi $\|.\|_2 \leq \|.\|_1$.
Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $u^N \in \ell^1(\mathbb{R})$.
On a $\left\|u^N\right\|_1 = N$ et $\left\|u^N\right\|_2 = \sqrt{N}$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|.\|_1 \leq \alpha \|.\|_2$.
$\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) Supposons que N_a est une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
Pour $m \in \mathbb{N}$, la suite élémentaire $e_m = (\delta_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle donc

$$N_a(e_m) = a_m > 0$$

De plus, pour la suite constante $u = (1)_{n\in\mathbb{N}}$, la quantité $N_a(u)$ existe et donc la série $\sum a_n$ converge.
Inversement, si $\sum a_n$ est une série convergente à termes strictement positifs alors on montre que l'application $N_a : \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et que celle-ci est une norme sur l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

(b) On a aisément $N_a \leq k \|.\|_\infty$ avec $k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
Inversement, supposons $\|.\|_\infty \leq k' N_a$. Pour la suite élémentaire e_m, on obtient $\|e_m\|_\infty \leq k' N_a(e_m)$ et donc $a_m \geq 1/k$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cette propriété est incompatible avec la convergence de la série $\sum a_n$.
Ainsi N_a est dominée par $\|.\|_\infty$ mais ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) N_∞ est bien connue pour être une norme sur l'ensemble des fonctions bornées, il en est de même sur l'ensemble des suites bornées dont le premier terme est nul.
L'application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie. On vérifie aisément
$N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ et $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$. Si $N(u) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ et puisque $u_0 = 0$, on obtient $u = 0$. Ainsi N est une norme sur E.

(b) Pour $u \in E$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2N_\infty(u)$$

On en déduit

$$N(u) \leq 2N_\infty(u)$$

La suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 1$ est une suite non nulle pour laquelle il y a égalité.

(c) Considérons la suite $u^{(p)}$ définie par

$$u^{(p)}(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq p \\ p & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$u^{(p)} \in E, N_\infty(u^{(p)}) = p \text{ et } N(u^{(p)}) = 1$$

On en déduit que les normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes car

$$\frac{N_\infty(u^{(p)})}{N(u^{(p)})} \to +\infty$$

Exercice 33 : [énoncé]

(a) L'application N est bien définie sur E et valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Si $N(f) = 0$ alors par nullité d'une somme de positifs $f(0) = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$ et donc f est constante égale à 0.
$N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \|f'\|_\infty = |\lambda| N(f)$.
$N(f + g) = |f(0) + g(0)| + \|f' + g'\|_\infty \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g)$.

(b) Aisément $N(f) \leq N'(f)$ car $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$.
Pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$|f(x)| = \left|f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |f(0)| + \int_0^x \left\|f'\right\|_\infty \leq |f(0)| + x \left\|f'\right\|_\infty \leq N(f)$$

Par suite $\|f\|_\infty \leq N(f)$ puis sachant $\|f'\| \leq N(f)$ on a

$$N'(f) \leq 2N(f)$$

(c) Pour $f_n(x) = x^n$.

$$\|f_n\|_\infty = 1 \text{ et } N(f_n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc N et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. *A fortiori*, N' n'est pas non plus équivalente à $\|.\|_\infty$.

Exercice 34 : [énoncé]

(a) Les applications sont bien définies $N_i\colon E \to \mathbb{R}_+$ car toute fonction continue sur un segment y est bornée.
Les propriétés $N_i(f+g) \le N_i(f) + N_i(g)$ et $N_i(\lambda f) = |\lambda|\, N_i(f)$ sont faciles.
Si $N_1(f) = 0$ alors $f' = 0$ et sachant $f(0) = 0$, on obtient $f = 0$.
Si $N_2(f) = 0$ alors la résolution de l'équation différentielle $f' + f = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 0$ donne $f = 0$.
Ainsi les applications N_1, N_2 sont bien des normes sur E.

(b) Pour $f \in E$, on a

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui permet d'établir $\|f\|_\infty \le \|f'\|_\infty$.
Puisque

$$N_2(f) \le \|f\|_\infty + \left\|f'\right\|_\infty \le 2N_1(f)$$

la norme N_2 est dominée par la norme N_1.

(c) Sachant $f(0) = 0$, on a

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x \left(f(t)\,\mathrm{e}^t\right)'\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x (f(t) + f'(t))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|f(x)| \le N_2(f)$$

Puisque

$$\left|f'(x)\right| \le \left|f(x) + f'(x)\right| + |f(x)|$$

on obtient

$$\left|f'(x)\right| \le 2N_2(f)$$

et finalement

$$N_1(f) \le 2N_2(f)$$

Exercice 35 : [énoncé]

Pour tout $f, g \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il est clair que $N_i(f+g) \le N_i(f) + N_i(g)$ et que $N_i(\lambda f) = \lambda N_i(f)$.
Supposons $N_1(f) = 0$, on a alors $\sup_{x\in[0;1]}|f(x)| = 0$ donc $f = 0$.
Supposons maintenant que $N_2(f) = 0$, on a alors $\sup_{x\in[0;1]}|f(x) + f'(x)| = 0$ donc $f(x) + f'(x) = 0$. Après résolution de l'équation différentielle sous-jacente, $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $\lambda = f(0) = 0$ et finalement $f = 0$.
Finalement N_1 et N_2 sont bien deux normes sur E.
Il est clair que

$$N_2(f) \le N_1(f)$$

Posons maintenant $M = N_2(f)$. Pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$\left|f(x) + f'(x)\right| \le M$$

donc

$$\left|(f(x)\,\mathrm{e}^x)'\right| \le M\,\mathrm{e}^x$$

d'où

$$|f(x)\,\mathrm{e}^x| = \left|\int_0^x \left(f(t)\,\mathrm{e}^t\right)'\mathrm{d}t\right| \le \int_0^x M\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \le M\,\mathrm{e}\,x$$

puis $|f(x)| \le M\,\mathrm{e}$ pour tout $x \in [0;1]$. Ainsi

$$\sup_{x\in[0;1]}|f(x)| \le M\,\mathrm{e}$$

De plus

$$\left|f'(x)\right| \le \left|f(x) + f'(x)\right| + |f(x)| \le M(1+\mathrm{e})$$

donc

$$\sup_{x\in[0;1]}\left|f'(x)\right| \le M(1+\mathrm{e})$$

et finalement

$$N_1(f) \le M(1+2\,\mathrm{e}) = N_2(f)(1+2\,\mathrm{e})$$

On peut conclure que les deux normes sont effectivement équivalentes.

Exercice 36 : [énoncé]

(a) L'application $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et on vérifie aisément $N(\lambda f) = |\lambda|\,N(f)$ et $N(f+g) \le N(f) + N(g)$.
Supposons maintenant $N(f) = 0$, la fonction f est alors solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ ce qui entraîne $f = 0$.
Finalement N est une norme sur E.

(b) On a évidemment $N \leq \nu$.
Inversement, soit $f \in E$ et $g = f + f''$. La fonction f est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = g$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Après résolution via la méthode de variation des constantes, on obtient

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit $|f(x)| \leq x\,\|g\|_\infty \leq \pi\,\|g\|_\infty$ et donc $\|f\|_\infty \leq \pi N(f)$.
De plus $\|f''\|_\infty \leq \|f + f''\|_\infty + \|f\|_\infty$ donc $\nu(f) \leq (\pi+1)N(f)$.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) $\|.\|_\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Si $\|f\|_\varphi = 0$ alors la fonction $t \mapsto |f(t)|\,\varphi(t)$ est nulle. En dehors des valeurs où φ est nulle, la fonction f s'annule. Or φ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, donc par un argument de continuité, f s'annule aussi en ces points et finalement $f = \tilde{0}$.
Les propriétés $\|\lambda f\|_\varphi = |\lambda|\,\|f\|_\varphi$ et $\|f+g\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$ sont immédiates.

(b) Considérons la fonction φ_2/φ_1. Cette fonction est définie et continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y est donc bornée et il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant
$\forall x \in [0\,;1], \varphi_2(x) \leq M\varphi_1(x)$. On en déduit $\|.\|_{\varphi_1} \leq M\,\|.\|_{\varphi_2}$. Ainsi $\|.\|_{\varphi_1}$ est dominée par $\|.\|_{\varphi_2}$ et par un argument symétrique $\|.\|_{\varphi_2}$ est dominée par $\|.\|_{\varphi_1}$.

(c) On a facilement $\|.\|_{x^2} \leq \|.\|_x$.
Pour $f_n(x) = (1-x)^n$, on a après étude des variations des fonction $x \mapsto x(1-x)^n$ et $x \mapsto x^2(1-x)^n$

$$\|f_n\|_x = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$$

et

$$\|f_n\|_{x^2} = \left(\frac{2}{n+2}\right)^2\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n \sim \frac{\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$$

donc il n'existe pas de constante $M \geq 0$ telle que $\|.\|_x \leq M\,\|.\|_{x^2}$. Les deux normes $\|.\|_x$ et $\|.\|_{x^2}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) L'application $\|.\|_\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Si $\|f\|_\varphi = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, la fonction $t \mapsto |f(t)|\,\varphi(t)$ est nulle. En dehors des valeurs où φ est nulle, la fonction f s'annule. Or φ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, donc par un argument de continuité, f s'annule aussi en ces points et finalement $f = \tilde{0}$.
Les propriétés $\|\lambda f\|_\varphi = |\lambda|\,\|f\|_\varphi$ et $\|f+g\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$ sont immédiates.

(b) Considérons la fonction φ_2/φ_1. Cette fonction est définie et continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y est donc bornée et il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall x \in [0\,;1], \varphi_2(x) \leq M\varphi_1(x)$$

On en déduit

$$\forall f \in E, \int_0^1 |f(t)|\,\varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \leq M\int_0^1 |f(t)|\,\varphi_2(t)\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit $\|.\|_{\varphi_1} \leq M\,\|.\|_{\varphi_2}$. La norme $\|.\|_{\varphi_1}$ est dominée par $\|.\|_{\varphi_2}$ et, par un argument symétrique, $\|.\|_{\varphi_2}$ est dominée par $\|.\|_{\varphi_1}$.

(c) On vérifie facilement $\|.\|_{x^2} \leq \|.\|_x$ car

$$\forall t \in [0\,;1], t^2 \leq t$$

Pour $f_n(x) = (1-x)^n$, on a

$$\|f_n\|_x = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

et

$$\|f_n\|_{x^2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

donc il n'existe pas de constante $M \geq 0$ telle que $\|.\|_x \leq M\,\|.\|_{x^2}$.
Les deux normes $\|.\|_x$ et $\|.\|_{x^2}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 39 : [énoncé]
On sait $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$ et $\alpha N \leq N_\infty \leq \beta N$ avec $\alpha,\beta > 0$ donc

$$N(AB) \leq \frac{1}{\alpha}N_\infty(AB) \leq \frac{n}{\alpha}N_\infty(A)N_\infty(B) \leq \frac{n\beta^2}{\alpha}N(A)N(B)$$

Exercice 40 : [énoncé]
Les applications

$$N_1 : P \mapsto \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } N_2 : P \mapsto \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|$$

définissent deux normes sur l'espace E. Puisque l'espace E est de dimension finie, ces deux normes sont équivalentes et en particulier N_2 est dominée par N_1

Exercice 41 : [énoncé]

(a) facile.

(b) (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons que la suite (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une certaine fonction f. On ne sait pas *a priori* si cette fonction est, ou non, polynomiale.
Soit $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$ une famille de $d+1$ réels distincts et $P \in E$ déterminé par $P(\xi_k) = f(\xi_k)$. On peut affirmer que la (P_n) suite converge vers P pour la norme N_ξ.
Soit $[a\,;b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. $N = \|.\|_{\infty,[a;b]}$ définit une norme sur E qui est équivalent à N_ξ car E est de dimension finie. Puisque (P_n) converge vers P pour la norme N_ξ, on peut affirmer que la convergence a aussi lieu pour la norme N et donc (P_n) converge uniformément vers P sur le segment $[a\,;b]$. Au passage, on en déduit que $f = P$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Si la suite (P_n) converge uniformément sur tout segment vers une fonction f, elle converge aussi simplement vers f et l'étude ci-dessus montre que f est un polynôme. En introduisant la norme infinie relative aux coefficients polynomiaux :

$$\left\|a_0 + \cdots + a_d X^d\right\|_\infty = \max_{0 \le k \le d} |a_k|$$

l'équivalence de norme permet d'établir que les coefficients de P_n convergent vers les coefficients respectifs de f.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) immédiat.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) L'application $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ proposée vérifie aisément

$$N(\lambda f) = |\lambda|\,N(f) \text{ et } N(f+g) \le N(f) + N(g)$$

Le problème est l'obtention de l'implication de séparation

$$N(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$$

Procédons par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$.
Cas $d = 1$: $E = \mathrm{Vect}(g)$ avec $g \ne \tilde{0}$. Un réel $a_1 \in [0\,;1]$ tel que $g(a_1) \ne 0$ convient.
Supposons la propriété au rang $d \ge 1$.
Soit E un sous-espace vectoriel de dimension $d+1$ de $C^0([0\,;1], \mathbb{R})$. Il existe une fonction g non nulle élément de E et il existe $a_{d+1} \in [0\,;1]$ tel que $g(a_{d+1}) \ne 0$.
Considérons alors $H = \{f \in E \mid f(a_{d+1}) = 0\}$. On vérifie aisément $E = H \oplus \mathrm{Vect}\, g$.
Puisque H est alors de dimension d, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour introduire $(a_1, \dots, a_d) \in [0\,;1]^d$ tel que $h \mapsto \sum_{i=1}^d |h(a_i)|$ soit une norme sur$H$.
Considérons alors l'application

$$N\colon f \in E \mapsto \sum_{i=1}^{d+1} |f(a_i)|$$

et montrons

$$N(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$$

Supposons $N(f) = 0$ et donc $|f(a_1)| = \dots = |f(a_d)| = |f(a_{d+1})| = 0$. Puisque $E = H \oplus \mathrm{Vect}\, g$, on peut écrire $f = h + \lambda g$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La propriété $|f(a_{d+1})| = 0$ entraîne $\lambda = 0$ et la propriété $|f(a_1)| = \dots = |f(a_d)| = 0$ entraîne alors $h = 0$. On peut donc conclure $f = 0$.
Récurrence établie.

(b) Introduisons $E' = E + \mathrm{Vect}\, f$ de dimension d ou $d+1$. Sur E', on peut introduire une norme du type précédent et l'hypothèse de convergence simple donne alors que (f_n) tend vers f pour la norme considérée. Or sur E' de dimension finie toutes les normes sont équivalentes et donc (f_n) tend aussi vers f pour la norme $\|.\|_\infty$ ce qui signifie que (f_n) converge uniformément vers f.
Il reste à montrer que $f \in E$. Par l'absurde, supposons que $f \notin E$. On a alors $E' = E \oplus \mathrm{Vect}\, f$. Considérons alors la projection p sur $\mathrm{Vect}\, f$ parallèlement à E. C'est une application linéaire au départ d'un espace de dimension finie, elle est donc continue. Or $p(f_n) = 0 \to 0$ et $p(f_n) \to p(f) = f \ne 0$. C'est absurde.

Exercice 43 : [énoncé]

Soient $a_0, \dots, a_N$ des réels deux à deux distincts. Considérons la fonction polynôme P de degré inférieur à N vérifiant

$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, P(a_k) = f(a_k)$$

Sur l'espace $\mathbb{R}_N[X]$, on peut introduire la norme donnée par

$$N(Q) = \max_{0 \le k \le N} |Q(a_k)|$$

Pour cette norme, on peut affirmer que la suite (P_n) converge vers P. Or l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ est de dimension finie, toutes les normes y sont donc équivalentes. La convergence de (P_n) vers P a donc aussi lieu pour les normes données par

$$\|Q\|_{\infty,[a;b]} = \sup_{t \in [a;b]} |Q(t)|$$

La suite (P_n) converge vers P sur tout segment de $\mathbb{R}$ et donc converge simplement vers P. Par unicité de la limite simple, la fonction f est égale à P.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) $N_a(1,1)$ et $N_a(1,-1)$ doivent exister et être strictement positifs. Cela fournit les conditions nécessaires $2a+2>0$ et $2-2a>0$ d'où $a\in\,]-1\,;1[$. Montrons que cette condition est suffisante.
Supposons $a\in\,]-1\,;1[$ et considérons $\varphi\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par
$\varphi((x,y),(x',y')) = xx'+yy'+axy'+ayx'$.
L'application φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y)\neq(0,0)$,
$\varphi((x,y),(x,y))\geq(1-|a|)(x^2+y^2)>0$ en vertu de $|2axy|\leq|a|\left(x^2+y^2\right)$. Ainsi φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et N_a est la norme euclidienne associée.

(b) Le cas $a=b$ est immédiat. Quitte à échanger, on peut désormais supposer $a<b$.
Par homogénéité, on peut limiter l'étude de $\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}$ au couple $(x,y)=(\cos t,\sin t)$ avec $t\in\,]-\pi/2\,;\pi/2]$.
Posons

$$f(t)=\left(\frac{N_a(\cos t,\sin t)}{N_b(\cos t,\sin t)}\right)^2=\frac{1+a\sin 2t}{1+b\sin 2t}$$

On a

$$f'(t)=2\frac{(a-b)\cos(2t)}{(1+b\sin 2t)^2}$$

Les variations de f sont faciles et les extremums de $f(t)$ sont en $t=-\pi/4$ et $t=\pi/4$.
Ils valent $\frac{1-a}{1-b}$ et $\frac{1+a}{1+b}$.
On en déduit

$$\inf_{(x,y)\neq 0}\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}=\sqrt{\frac{1+a}{1+b}}$$

et

$$\sup_{(x,y)\neq 0}\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}=\sqrt{\frac{1-a}{1-b}}$$

(dans le cas $a<b$).

Exercice 45 : [énoncé]
Il suffit d'observer

$$(BA)^{n+1}=B(AB)^nA\to O_p$$

Exercice 46 : [énoncé]
Puisque les matrices A et B commutent, il en est de même des matrices A^k et B^k. En passant à la limite la relation

$$A^kB^k=B^kA^k$$

on obtient

$$PQ=QP$$

Exercice 47 : [énoncé]
On a

$$A_nA_n^{-1}=I_p$$

En passant cette relation à la limite on obtient

$$AB=I_p$$

Par le théorème d'inversibilité, on peut affirmer que A est inversible et

$$A^{-1}=B$$

Exercice 48 : [énoncé]
Si A est limite d'une suite (M^n) alors $M^{2n}\to A$ et $M^{2n}=(M^n)^2\to A^2$.
Par unicité de la limite, on obtient $A^2=A$.
Inversement, si $A^2=A$ alors $A=\lim_{n\to+\infty}M^n$ avec $M=A$.

Exercice 49 : [énoncé]
$A^{2n}\to B$ et $A^{2n}=A^n\times A^n\to B^2$ donc $B=B^2$ et B est une matrice de projection.

Exercice 50 : [énoncé]

(a) Il existe $P\in\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP=D$ avec $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ et $\left|\lambda_j\right|<1$.
On a alors $A^n=PD^nP^{-1}$ avec $D^n=\mathrm{diag}(\lambda_1^n,\dots,\lambda_p^n)\to O_p$ donc
$A^n\to PO_pP^{-1}=O_p$.

(b) En reprenant la démarche qui précède, on peut conclure dès que l'on établit que si T est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $]-1\,;1[$ alors $T^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}O_p$.
Raisonnons par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^*$.
Pour $p=1$, la propriété est immédiate.
Supposons le résultat vrai au rang $p\geq 1$.
Soit $T\in\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $]-1\,;1[$.
On peut écrire

$$T=\begin{pmatrix}\lambda & L\\ O_{n,1} & S\end{pmatrix}$$

avec $|\lambda|<1$ et $S\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $]-1\,;1[$.
Par le calcul, on obtient

$$T^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & L_n\\ O_{n,1} & S^n\end{pmatrix}$$

avec

$$L_n = L\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k S^{n-1-k}$$

On a $\lambda^n \to 0$ et $S^n \to O_n$ par hypothèse de récurrence.
Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k S^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{n-1-k}S^k \to O_n$$

car ceci entraîne $L_n \to O_{1,n}$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $S^n \to O_n$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ au-delà duquel $\|S^n\| \le \varepsilon$.
On alors

$$\left\|\sum_{k=N}^{n-1}\lambda^{n-1-k}S^k\right\| \le \varepsilon\sum_{k=N}^{n-1}|\lambda|^{n-1-k} \le \frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}$$

De plus, puisque $\sum_{k=0}^{N-1}\lambda^{n-1-k}S^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} O_n$ car somme d'un nombre constant de termes de limites nulles, on peut affirmer que pour n assez grand, on a

$$\left\|\sum_{k=0}^{N-1}\lambda^{n-1-k}S^k\right\| \le \varepsilon$$

Ainsi, pour n assez grand

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{n-1-k}S^k\right\| \le \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}$$

et on peut conclure.
Récurrence établie.

Exercice 51 : [énoncé]
Posons $r = \operatorname{rg} A_\infty$.
La matrice A_∞ possède est déterminant extrait non nul de taille r.
Le déterminant extrait correspondant des matrices A_n est alors non nul à partir d'un certain rang et donc $\operatorname{rg}(A_n) \ge r$

Exercice 52 : [énoncé]
Posons $r = \operatorname{rg} A$.
La matrice A possède un déterminant extrait non nul de taille r.
Le déterminant extrait correspondant des matrices A_k est alors non nul à partir d'un certain rang et donc
$p = \operatorname{rg}(A_k) \ge r = \operatorname{rg} A$

Exercice 53 : [énoncé]

(a) Une matrice $A \in E_q$ annule le polynôme scindé simple $X^q - 1$, elle est donc diagonalisable. Si 1 est sa seule valeur propre alors $A = I_n$ car semblable à I_n.

(b) Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite (A_p) d'éléments de $E_q \setminus \{I_n\}$ vérifiant

$$A_p \to I_n$$

Par continuité de la trace

$$\operatorname{tr} A_p \to n$$

Or la trace de A_p est la somme de ses valeurs propres, celles-ci ne sont pas toutes égales à 1 et sont racines $q$ème de l'unité donc

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr} A_p) \le (n-1) + \cos\frac{2\pi}{q}$$

Cette majoration est incompatible avec la propriété $\operatorname{tr} A_p \to n$.

Exercice 54 : [énoncé]
On peut écrire

$$1 = \sqrt{1+(a/n)^2}\cos(\theta_n) \text{ et } a/n = \sqrt{1+(a/n)^2}\sin(\theta_n)$$

avec

$$\theta_n = \arctan(a/n)$$

On a alors $A_n = \sqrt{1+(a/n)^2}R(\theta_n)$ avec $R(\theta_n)$ la matrice de rotation

$$R(\theta_n) = \begin{pmatrix}\cos\theta_n & -\sin\theta_n\\ \sin\theta_n & \cos\theta_n\end{pmatrix}$$

Par suite

$$A_n^n = \left(1+\left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{n/2}\begin{pmatrix}\cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n)\\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n)\end{pmatrix}$$

Or

$$\left(1+\left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \text{ et } n\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$$

donc

$$A_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{pmatrix}$$

Exercice 55 : [énoncé]
D'une part
$$^t(A^k) \to {}^tB$$
et d'autre part
$$^t(A^k) = (-1)^k A^k$$
de sorte que
$$^t(A^{2p}) = (-1)^{2p} A^{2p} \to B$$
et
$$^t(A^{2p+1}) = (-1)^{2p+1} A^{2p+1} \to -B$$
Par unicité de la limite, on obtient
$$B = {}^tB = -B$$
On en déduit que la matrice B est nulle.

Exercice 56 : [énoncé]
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Le plus simple est sans doute d'utiliser la décomposition de Dunford :
$M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente commutant entre elles. Par la formule du binôme de Newton, on peut calculer M^k et tronquer la somme par la nilpotence de N, on parvient alors à une somme finie de termes qui tendent vers 0 par croissance comparée.
Une autre méthode, techniquement plus lourde, consiste à introduire
$\rho_\ell^k = \max\left\{\left|(M^k)_{1,\ell+1}\right|, \dots, \left|(M^k)_{n-\ell,n}\right|\right\}$ qui majorent les coefficients de M^k situés sur la diagonale (pour $\ell = 0$), sur la sur-diagonale (pour $\ell = 1$) etc. En notant que $\rho = \rho_0^1 < 1$, on montre par récurrence sur k que $\rho_\ell^k \leq k^\ell \left\|M\right\|_\infty^{\ell+1} \rho^{k-\ell}$ ce qui permet de conclure.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons que $M^k \to 0$. On peut alors affirmer que 1 n'est pas valeur propre de M car $MX = X \implies M^kX = X$ et donc à la limite $MX = X \implies X = 0$. Par suite la matrice $I - M$ est inversible et puisque $(I - M)\sum_{k=0}^m M^k = I - M^{m+1}$,
$\sum_{k=0}^m M^k = (I - M)^{-1}(I - M^{m+1})$ d'où la convergence de la série des M^k.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Puisque $\sum_{k=0}^m M^k$ converge quand $\operatorname{rg} C \geq r$, on a $\sum_{k=0}^m M^kX$ converge, puis $\sum_{k=0}^n \lambda^k X$ converge et donc $|\lambda| < 1$ (car $X \neq 0$).

Exercice 57 : [énoncé]

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k\,\|x_n - x_{n-1}\| \leq \ldots \leq k^n\,\|x_1 - x_0\|$$
Puisque $k \in [0\,;1[$, la série numérique $\sum k^n$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ converge. La série télescopique $\sum x_{n+1} - x_n$ est donc absolument convergente et donc convergente car l'espace E est de dimension finie. Ainsi, la suite (x_n) converge.

(b) Existence : Introduisons x_∞ la limite de la suite (x_n). On a
$$\|x_{n+1} - f(x_\infty)\| = \|f(x_n) - f(x_\infty)\| \leq k\,\|x_n - x_\infty\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et donc (x_n) tend aussi vers $f(x_\infty)$. Par unicité de la limite, on obtient $f(x_\infty) = x_\infty$.
Unicité : Si x, y sont points fixes de f alors
$$\|y - x\| = \|f(y) - f(x)\| \leq k\,\|y - x\| \text{ avec } k \in [0\,;1[$$
entraîne $x = y$ et donc f possède au plus un point fixe.

(c) Si a est point fixe de f alors a est point fixe de f^p et donc a est unique.
Inversement, soit a un point fixe de f^p.
On a $f^p(a) = a$ donc $f^{p+1}(a) = f(a)$ ce qui donne $f^p(f(a)) = f(a)$.
Or le point fixe de f^p est unique donc $f(a) = a$ et a est point fixe de f.